МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров, В.А. Пчелинцев

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА

Методом параметрических представлений решается задача о множестве значений производной Шварца на классах S и S_M с указанием граничных функций.

Ключевые слова: *метод параметрических представлений, функционал, производная Шварца.*

Основными методами геометрической теории функций являются метод параметрических представлений, метод площадей, вариационный метод, метод интегральных представлений. Эти методы появились в разное время, и поводом для их разработки явились различные экстремальные задачи, к числу которых относится задача Л. Бибербаха о коэффициентах голоморфных однолистных в единичном круге функций на классе S, а также задачи практического построения конформных отображений односвязных и многосвязных областей.

В статье даётся применение метода параметрических представлений к задаче о нахождении области значений производной Шварца на классах S и S_M. Используемый метод, позволяющий получить конформное отображение одной области на другую в результате предельного перехода в специально построенных семействах отображений, в своей первооснове восходит к работе Карла Лёвнера [1]. О дальнейшем развитии метода см. в [2, 3].

1. Производная Шварца: определение и свойства

Пусть f – голоморфное однолистное отображение области $D\subset\mathbb{C}$. Тогда существуют все производные $f^{(n)}$ ($n = 1,2,\ldots$), голоморфные в D, причем $f'(z)\neq 0$ в D.

Производной Шварца (или шварцианом) функции f называют функцию

$$\Phi(z)=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

обозначаемую также $\{f(z), z\}$, $\{f, z\}$, т.е. $\{f(z), z\}=\{f, z\}=\Phi(z)$.

Отметим следующие свойства $\{f, z\}$.

1^0. Очевидно, $\{z, z\}=0$.

2^0. Если $f(z)$ – дробно-линейная функция, т.е. $f(z)=(az+b)/(cz+d)$, $ad-bc\neq 0$, то $\{f, z\}=0$.

3^0. Покажем, что если $\xi=F(w)$ – голоморфная функция в $f(D)$, а $w=f(z)$ – голоморфная функция в D, то

$$\{F(f(z)),z\}=\{F(w),w\}\Big|_{w=f(z)} f'^2(z)+\{f(z),z\}. \qquad (1)$$

► Действительно, так как $[F(f(z))]'=F'(f(z))f'(z)$, то для логарифмической производной имеем

$$\frac{[F(f(z))]''}{[F(f(z))]'}=\frac{F''(f(z))f'(z)}{F'(f(z))}+\frac{f''(z)}{f'(z)}. \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{[F(f(z))]''}{[F(f(z))]'}\right)^2=\left(\frac{F''(f(z))f'(z)}{F'(f(z))}\right)^2+2\frac{F''(f(z))f''(z)}{F'(f(z))}+\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2. \qquad (3)$$

Продифференцируем (2) по z, получим

$$\frac{[F(f(z))]'''}{[F(f(z))]'}-\left(\frac{[F(f(z))]''}{[F(f(z))]'}\right)^2=\frac{F'''(f(z))(f'(z))^2}{F'(f(z))}+\frac{F''(f(z))f''(z)}{F'(f(z))}-$$
$$-\left(\frac{F''(f(z))f'(z)}{F'(f(z))}\right)^2+\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2. \qquad (4)$$

Вычитая из формулы (4) формулу (3), предварительно умноженную на ½, получим (1).◄

В частности, полагая $F(w)=(aw+b)/(cw+d)$, $ad-bc\neq 0$, имеем

$$\{F(f(z)),z\}=\{f(z),z\}.$$

2. Интегральное представление производной Шварца

Пусть S – класс голоморфных однолистных в круге $E=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$ функций

$$f(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots$$

и S_M, $1\le M<\infty$, – класс ограниченных в E функций f из класса S, т.е. таких, что $|f(z)|<M$ в E. Считаем $S_\infty=S$. Класс S_1 содержит только одну функцию $f(z)=z$.

Плотный в смысле равномерной сходимости на компактах подкласс класса S (и S_M) функций $f(z;\mu)$ может быть получен из совокупности решений $\zeta=\zeta(\tau,z;\mu)$ уравнения Лёвнера

$$\frac{d\varsigma}{d\tau}=-\varsigma\frac{\mu(\tau)+\varsigma}{\mu(\tau)-\varsigma},\ 0<\tau<M<\infty, \qquad (5)$$

в котором $\mu(\tau)$ – непрерывная функция, $|\mu(\tau)|=1$, удовлетворяющих начальному условию $\zeta(0,z;\mu)=z$, $z\in E$, по формуле

$$f(z;\mu)=\lim_{\tau\to\infty}e^{\tau}\varsigma(\tau,z;\mu)$$

для класса S и по формуле

$$f(z;\mu)=M\varsigma(\ln M,z;\mu)$$

для класса S_M. Функция $\varsigma(\tau,z;\mu)=e^{-\tau}z+\ldots$ однолистно и конформно отображает единичный круг в единичный круг.

Эти утверждения лежат в основе метода параметрических представлений.

Применим указанный метод к нахождению множества $\Delta(z_0)\subset\mathbb{C}$ значений производной Шварца $\Phi(z)=\{f, z\}$ при фиксированном $z = z_0\in E$ на классах S и S_M.

Множество $\Delta(z_0)$ ограниченно, замкнуто и связно. Представим функционал $\{f, z_0\}$ интегралом.

Пусть $\zeta(\tau, z; \mu)$ – решение уравнения Лёвнера. Дифференцируя тождество

$$\frac{d\varsigma(\tau,z;\mu)}{d\tau}=-\varsigma(\tau,z;\mu)\frac{\mu(\tau)+\varsigma(\tau,z;\mu)}{\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z;\mu)}$$

по переменной z и меняя в смешанной производной порядок дифференцирования, получим

$$\frac{d}{d\tau}\ln\varsigma'(\tau,z;\mu)=-\frac{\mu(\tau)+\varsigma(\tau,z;\mu)}{\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z;\mu)}-\frac{2\mu(\tau)\varsigma(\tau,z;\mu)}{(\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z;\mu))^2}.$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по z.

Простые вычисления дают

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\varsigma''(\tau,z;\mu)}{\varsigma'(\tau,z;\mu)}=-\frac{4\mu^2(\tau)\varsigma'(\tau,z;\mu)}{(\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z;\mu))^3} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\varsigma''(\tau,z;\mu)}{\varsigma'(\tau,z;\mu)}\right)^2=-\frac{4\mu^2(\tau)\varsigma''(\tau,z;\mu)}{(\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z;\mu))^3}. \tag{7}$$

Дифференцируя (6) по z и учитывая (7), получим

$$\frac{d}{d\tau}\{\varsigma(\tau,z;\mu),z\}=-\frac{12\mu^2(\tau)\varsigma'^2(\tau,z;\mu)}{(\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z;\mu))^4}. \tag{8}$$

Итак, доказана

Теорема 1. Пусть $\mu(\tau)$, $0<\tau<M<\infty$, – непрерывная функция и $\zeta(\tau, z; \mu)$, $\zeta(0, z; \mu) = z\in E$, – решение уравнения (5). Тогда имеет место формула (8).

Следствие 1. Множество точек

$$\{f(z_0,\mu),z_0\}=-12\int_0^\infty\frac{\mu^2(\tau)\varsigma'^2(\tau,z_0;\mu)}{(\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z_0;\mu))^4}d\tau \tag{9}$$

плотно в $\Delta(z_0)$ на классе S.

Следствие 2. Множество точек

$$\{f(z_0,\mu),z_0\}=-12\int_0^{\ln M}\frac{\mu^2(\tau)\varsigma'^2(\tau,z_0;\mu)}{(\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z_0;\mu))^4}d\tau$$

плотно в $\Delta(z_0)$ на классе S_M.

3. Множество значений функционала $\Phi(z_0)$ на классе S

В точке $z_0=0$ функционал $\Phi(z_0)=6(c_3-c_2^2)$.

Мажорантную область для функционала $\Phi(0)=6(c_3-c_2^2)=6J(0)$ на классе S получим, выполнив оценку интеграла в формуле (9), принимающей вид

$$J(0) = c_3 - c_2^2 = -2\int_0^\infty \frac{e^{-2\tau}}{\mu^2(\tau)}\,d\tau.$$

Так как $|\mu(\tau)|=1$, то

$$|J(0)| = \left|c_3 - c_2^2\right| \le 2\int_0^\infty e^{-2\tau}d\tau = 1$$

и, следовательно, $J(0)$ лежит в круге $|J|\le 1$. Покажем, что $J(0)$ – замыкание единичного круга, т.е., что каждая его точка $\rho e^{i\theta}$, $0\le\rho\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$, является значением функционала $c_3 - c_2^2$ на классе S.

Функции

$$K(z,\varphi) = \frac{z}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2} = z + 2e^{i\varphi}z^2 + 3e^{2i\varphi}z^3 + \dots,$$

$$K_1(z,\varphi) = -K(-z,\varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

класса S вносят в $J(0)$ точку $e^{i\theta} = -e^{2i\varphi}$. Для области $K(E, \varphi)$ точки

$$w(\lambda) = -\frac{e^{-i\varphi}}{4\sin^2\frac{\lambda}{2}},\ \ 0\le\lambda\le\pi,$$

являются граничными. Легко видеть, что функция

$$L(z,\varphi,\lambda) = \frac{w(\lambda)K(z,\varphi)}{w(\lambda)-K(z,\varphi)} = \frac{z}{1-2\cos\lambda e^{i\varphi}z + e^{2i\varphi}z^2} \tag{10}$$

также принадлежит классу S. Она отображает круг E на плоскость, разрезанную по двум лежащим на прямой лучам, уходящими от точки $\dfrac{e^{-i\varphi}}{4\sin^2\frac{\lambda}{2}}$ и от точки $-\dfrac{e^{-i\varphi}}{4\cos^2\frac{\lambda}{2}}$ на бесконечность. Отметим, что функция $L(z,\varphi,0) = K(z,\varphi)$ и функция $L(z,\varphi,\pi) = K_1(z,\varphi)$ отображают круг E на плоскость $\mathbb{C}$, разрезанную по одному лучу.

Согласно свойствам производной Шварца,

$$\{L(z,\varphi,\lambda), z\} = \{K(z,\varphi), z\} = -6e^{2i\varphi}.$$

Для функции $\dfrac{1}{\rho}K(\rho z,\varphi)\in S,\ 0\le\rho\le 1,$ имеем $J(0) = -\rho^2 e^{2i\varphi}$. Этим замечанием завершается доказательство утверждения о совпадении $J(0)$ с замыканием единичного круга.

Теорема 2. Множеством значений производной Шварца $\{f, z\}$ на классе S при $z_0 = 0$ является замкнутый круг радиуса 6 с центром в начале. Каждую граничную точку $e^{i\theta}$ в это множество вносят функции (10) при $\lambda\in[0,\pi]$ и $e^{2i\varphi} = -e^{i\theta}$.

Обращаясь к общему случаю $z_0\in E\setminus\{0\}$, воспользуемся тем, что если $f(z)\in S$, то в этот же класс входит функция

$$g(z)=\frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)-f(z_0)}{f'(z_0)\cdot\left(1-|z_0|^2\right)}.$$

Согласно свойствам производной Шварца,

$$\{g,z\}=\left\{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right),z\right\}=\{f(w),w\}\left(\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)'\right)^2=\{f(w),w\}\frac{\left(1-|z_0|^2\right)^2}{\left(1+\overline{z_0}z\right)^4},\ w=\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}.$$

Полагая z=0 и применяя теорему 2, получим неравенство

$$|\{f(z_0),z_0\}|\le\frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2},$$

определяющее $\Delta(z_0)$. Точка $-\frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}e^{i\theta}$ вносится функциями

$$f(z,\varphi,\lambda,z_0)=\frac{L\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z},\varphi,\lambda\right)-L(z_0,\varphi,\lambda)}{L'(z_0,\varphi,\lambda)\left(1-|z_0|^2\right)},$$

где $L(z,\varphi,\lambda)$ определяется формулой (10), $0\le\lambda\le\pi$ и $e^{2i\varphi}=-e^{i\theta}$, т.е. функциями

$$f(z,\varphi,\lambda,z_0)=\left(1-|z_0|^2\right)\left(\int_0^z\frac{\left(1+\overline{z_0}u\right)^2-e^{2i\varphi}(u+z_0)^2}{\left(\left(1+\overline{z_0}u\right)^2-2\cos\lambda e^{i\varphi}(u+z_0)+e^{2i\varphi}(u+z_0)^2\right)^2}du-\right.$$
$$\left.-\int_0^{z_0}\frac{\left(1+\overline{z_0}u\right)^2-e^{2i\varphi}(u+z_0)^2}{\left(\left(1+\overline{z_0}u\right)^2-2\cos\lambda e^{i\varphi}(u+z_0)+e^{2i\varphi}(u+z_0)^2\right)^2}du\right).$$

Из способа построения функции $f(z,\varphi,\lambda,z_0)$ следует, что она отображает круг E на плоскость, разрезанную по двум лежащим на прямой лучам, уходящими от точки

$$e^{-i\varphi}\frac{\left(1-2\cos\lambda z_0+z_0{}^2\right)\left(1-2\cos\lambda z_0+z_0{}^2-4\sin^2\frac{\lambda}{2}z_0\right)}{4\sin^2\frac{\lambda}{2}\left(1-z_0{}^2\right)\left(1-|z_0|^2\right)}$$

и от точки

$$-e^{-i\varphi}\frac{\left(1-2\cos\lambda z_0+z_0{}^2\right)\left(1-2\cos\lambda z_0+z_0{}^2+4\cos^2\frac{\lambda}{2}z_0\right)}{4\cos^2\frac{\lambda}{2}\left(1-z_0{}^2\right)\left(1-|z_0|^2\right)}$$

на бесконечность. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3. Пусть $f(z)\in S$ и $z_0\in E\setminus\{0\}$. Тогда множество значений функционала $\{f, z_0\}$ на классе S определяется неравенством

$$|\{f, z_0\}| \le \frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}.$$

Граничная точка $-\frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}e^{i\theta}$ реализуется только функциями $f(z,\varphi,\lambda,z_0)$ при $\lambda\in[0,\pi]$ и $e^{2i\varphi}=-e^{i\theta}$.

4. Неравенство для производной Шварца на классе S_M

Установим неравенство между модулями функции, производной и производной Шварца на классе S_M, $1<M<\infty$.

Теорема 4. Если $f\in S_M$ и $z_0\in E$, то

$$|\{f(z_0), z_0\}| + \frac{6M^2|f'(z_0)|^2}{\left(M^2-|f(z_0)|^2\right)^2} \le \frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}. \tag{11}$$

► Функция $w=a\frac{f(z)}{M}$, $|a|=1$, однолистно и конформно отображает E в E с сохранением нуля. Пусть $F(w)=w+c_2w^2+\ldots\in S$, $|\mathrm{w}|<1$. Тогда

$$\Psi(z)=\bar{a}MF\left(\frac{af(z)}{M}\right)=f(z)+\frac{a}{M}f^2(z)+\ldots\in S$$

и, согласно свойствам производной Шварца,

$$\{\Psi(z_0), z_0\}=\{F(w), w\}\left(\frac{af'(z_0)}{M}\right)^2+\{f(z_0), z_0\},$$

где $w=a\frac{f(z_0)}{M}$. Выберем $a=e^{-i\arg f'(z_0)}$. Тогда $af'(z_0)=|f'(z_0)|$ и

$$\{\Psi(z_0), z_0\}=\{F(w), w\}\frac{|f'(z_0)|^2}{M^2}+\{f(z_0), z_0\}.$$

Отсюда в силу теоремы 3

$$\left|\{f(z_0), z_0\}+\{F(w), w\}\frac{|f'(z_0)|^2}{M^2}\right| \le \frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}.$$

Теперь возьмём ту функцию, которой соответствует произвольная граничная точка в области значений функционала $\{F(w_0), w_0\}$ на классе S при $w_0=e^{-i\arg f'(z_0)}\frac{f(z_0)}{M}$. Получим неравенство

$$\left|\{f(z_0), z_0\} + \frac{6M^2|f'(z_0)|e^{i\theta}}{\left(M^2 - |f(z_0)|^2\right)^2}\right| \le \frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2},$$

которое при $\theta = \arg\{f(z_0), z_0\}$ даёт (11). ◄

Знак равенства в (11) будет иметь место только в том случае, если функция $\Psi(z)$ реализует граничную точку $-\frac{6}{\left(1-|z_0|^2\right)^2}e^{i\theta}$ области значений $\{\Psi(z_0), z_0\}$.

Это позволяет найти все функции $f \in S_M$, для которых в (11) имеет место знак равенства. В случае, когда $z_0=0$, граничная точка $\left(1-\frac{1}{M^2}\right)e^{i\theta}$ вносится только функцией

$$f_M(z,\varphi,\lambda) = \frac{2z}{1-2\left(1-\frac{1}{M}\right)\cos\lambda e^{i\varphi}z + e^{2i\varphi}z^2 + \sqrt{\left(1-2\left(1-\frac{1}{M}\right)\cos\lambda e^{i\varphi}z + e^{2i\varphi}z^2\right)^2 - \frac{4}{M^2}e^{2i\varphi}z^2}}$$

при $\lambda \in [0,\pi]$ и $e^{2i\varphi} = -e^{i\theta}$ и рассматривается та непрерывная ветвь радикала, которая обращается в единицу при $z=0$.

Из способа построения функции $f_M(z,\varphi,\lambda)$ следует, что она отображает круг E на круг $U = \{w \in \mathbb{C} : |w| < M\}$, из которого удалены два отрезка от точек

$$e^{-i\varphi}M^2\left(1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\cos\lambda - \sqrt{\left(1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\cos\lambda\right)^2 - \frac{1}{M^2}}\right)$$

и

$$-e^{-i\varphi}M^2\left(1-\left(1+\frac{1}{M}\right)\cos\lambda - \sqrt{\left(1-\left(1+\frac{1}{M}\right)\cos\lambda\right)^2 - \frac{1}{M^2}}\right)$$

соответственно до точек $e^{-i\varphi}M$ и $-e^{-i\varphi}M$.

В общем случае при $z_0 \in E \setminus \{0\}$ знак равенства имеет место только для функций

$$f(z) = \frac{\omega^2 - |g(-z_0)|^2}{g(-z_0)\left(1-|z_0|^2\right)} \frac{g\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right) - g(-z_0)}{\omega^2 - \overline{g(-z_0)}g\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)},$$

где $g(z) = f_\omega\left(z,\varphi,\sigma(1-\frac{1}{\omega})\right)$, $1<\omega<\infty$, $0 \le \sigma \le \pi$, и $\omega-$ корень уравнения

$$\frac{\omega^2 - \left|f_\omega\left(-z,\varphi,\sigma(1-\frac{1}{\omega})\right)\right|^2}{\omega\left|f'_\omega\left(-z,\varphi,\sigma(1-\frac{1}{\omega})\right)\right|\left(1-|z_0|^2\right)} = M. \qquad (12)$$

При этом $\dfrac{M|f'(z_0)|}{M^2-|f(z_0)|^2}=\dfrac{1}{\omega}$ и

$$\{f(z_0),z_0\}+\frac{6}{\omega^2}=-\frac{6e^{i\theta}}{\left(1-|z_0|^2\right)^2},$$

при $e^{2i\varphi}=-e^{i\theta}$.

Уравнение (12) при любом M, $1<M<\infty$, имеет по крайней мере одно решение.

Другими методами область значений шварциана исследовалась И. А. Александровым [4], Ю. Е. Аленицыным [5], Н. А. Лебедевым [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. Bd 89. S. 103 – 121.
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. 220 с.
4. *Александров И.А.* Область значений функционала $I=\{f, w\}$ на классе S // Вопросы математики. Тр. Том. гос. ун-та. 1961. Т. 155. С. 56 – 60.
5. *Аленицын Ю.Е.* Об однолистных функциях в многосвязных областях // Матем. сб. 1956. Т. 39 (81) № 3. С. 315 – 336.
6. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975. 336 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

АЛЕКСАНДРОВ Игорь Александрович – доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАО, профессор, заведующий кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ma@math.tsu.ru.
ПЧЕЛИНЦЕВ Валерий Анатольевич – студент 4 курса кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: VPchelintsev@vtomske.ru.

Статья принята в печать 07.06.2010 г.